中 国 科 学 (E 辑)
第 33 卷 第 4 期　SCIENCE IN CHINA (Series E)　2003 年 4 月

随机线性连续时间系统基于采样数据的二次指标控制*

姚莉丽　张纪峰
(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100080)

摘要　讨论了随机线性连续时间 (LCT) 系统基于采样数据的二次指标最优控制问题. 涉及到了两类随机 LCT 系统. 一类是定常参数的，另一类是具有 Markov 时变参数的. 分析了相应闭环系统的稳定性；比较了基于状态采样值的采样二次指标控制和基于状态全过程的常规二次指标控制下的最优指标值；证明了当采样时间 ΔT 间隔不大时，两种控制的效果差别也不大，误差的上界分别为 $O(\Delta T^2)$ 和 $O(\Delta T)$.

关键词　随机系统　采样控制　时变参数　二次指标

在对被控系统实施控制时，有关系统结构、状态、输出等方面的信息是非常重要、不可缺少的. 但由于对系统的了解程度及各种量测工具、估计方法、计算速度等诸多因素的影响与限制，有时我们得不到这些过程的全部信息. 比如，在某些情况下，虽然系统状态本身是一连续过程，但由于传感器和计算机采样方式、运行速度等方面的原因，我们只能得到采样时刻的状态信息. 这就引发了如下问题：对于事先设定的控制目标，何种条件下，基于部分信息设计的控制器可以达到基于全部信息设计的控制器所能达到的效果？如果两者的控制效果有差别，差别有多大，能给出定量描述吗？

基于上述问题，本文研究了随机线性连续时间 (LCT) 系统的二次指标最优控制问题. 主要分析了两类随机 LCT 系统：一类是定常参数的，另一类是具有 Markov 时变参数的. 在我们研究的问题中，系统的状态是由随机 LCT 微分方程描述的，因此是连续过程；但系统的状态只能在采样时刻才能量测到，因此对设计者来说只能利用离散时刻 (即采样时刻) 得到的信息设计控制器. 这样的控制通常称为采样控制. 一般来讲，具有采样控制器的闭环系统是既有连续信息又有离散信息的混合系统. 有关该类系统的研究已有许多，如文献 [1 ~ 6]. 其中文献 [1 ~ 4] 的研究对象是确定性系统，控制器的设计方法采用的是先离散化原连续模型，然后为离散模型设计最优控制. 如文献 [4] 中例 6.6.1 指出的，这样做的弊端是过于注重采样时刻的控制效果，易引起原系统在采样时刻之间的波动. 文献 [5,6] 讨论了输入阵为单位阵、且已知时的非线性随机系统的采样控制问题，给出了镇定控制，研究了采样间隔大小与闭环系统稳定性之

2001-11-29 收稿，　2002-04-22 收修改稿
* 国家自然科学基金 (批准号：60274021) 和国家攀登计划资助项目

间的关系．本文特色在于：

1) 研究了一般形式的 LCT 系统，既包括定常参数类又包括时变参数类.

2) 控制器设计直接基于原连续系统和原连续型性能指标，没涉及任何离散化模型或离散化指标.

3) 不仅研究了闭环系统的稳定性，而且还分析了闭环系统性能指标的最优性；特别地，比较了基于状态采样值的采样二次指标控制和基于状态全过程的常规二次指标控制下的最优指标值，给出了两者误差的显式关系式.

1　定常参数系统的二次指标最优采样控制

本节我们考虑定常参数 LCT 系统的二次指标最优采样控制．假定被控系统的模型为

$$\mathrm{d}x_t = Ax_t\mathrm{d}t + Bu_t\mathrm{d}t + C\mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

其中 $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入， $W_t \in \mathbb{R}^n$ 是标准 Brown 运动.

假定系统参数 A, B 已知，且系统 $[A, B]$ 能控．考虑二次指标

$$J(u) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (x_s^\tau Q x_s + u_s^\tau R u_s)\mathrm{d}s, \tag{2}$$

其中 $R > 0$, $Q \geqslant 0$, 且 $[A, Q^{1/2}]$ 能观.

我们的目的是研究采样步长对控制效果的影响，找出采样控制能镇定系统的条件，研究基于状态采样值的采样二次指标控制和基于状态全过程的常规二次指标控制下的最优指标值的差别，给出两者误差的显式关系式．为便于比较，我们先在下面的定理 1 中给出基于状态全过程的常规二次指标控制下的最优指标值，然后再在定理 2 中给出基于状态采样值的采样二次指标控制下的最优指标值.

为便于引用，我们记 $u = \{u_t, t \geqslant 0\}$ 和 $u^* = \{u_t^*, t \geqslant 0\}$, 并引入如下允许控制类：

$$\mathcal{U} = \Big\{ u:\quad u_t \in \sigma\{x_s : s \leqslant t\} \text{ 且使 (1) 式的状态}\{x_t\}\text{满足}$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\|x_t\|^2 = 0 \text{ 和 } \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|x_s\|^2\mathrm{d}s < \infty \Big\}. \tag{3}$$

定理 1　考虑系统 (1). 设 $[A, B, Q^{1/2}]$ 能控能观, P 是代数 Riccati 方程

$$A^\tau P + PA^\tau - PBR^{-1}B^\tau P + Q = 0 \tag{4}$$

的正定解，则

a) 对任一 $u \in \mathcal{U}$, 均有 $J(u) \geqslant \mathrm{tr}(C^\tau PC)$.

b) $u_t^* \triangleq -R^{-1}B^\tau P x_t \in \mathcal{U}$, 且 $J(u^*) = \mathrm{tr}(C^\tau PC) = \min\limits_{u\in\mathcal{U}} J(u)$.

此定理的结论可在已有的参考文献中找到 (如文献 [7]), 证略.

下面考虑采样控制．假定系统信号的采样时间是 ΔT, 我们可以设计具有零阶保持器的二次指标最优控制律

$$u_t = -R^{-1}B^\tau P x_{k\Delta T}, \quad t \in [k\Delta T, (k+1)\Delta T), \tag{5}$$

为简便起见，在下文中我们将用 x_k 来表示状态 x 在 $k\Delta T$ 时刻的采样值 $x_{k\Delta T}$.

在采样控制 (5) 下，我们可以得到如下结果：

定理 2　考虑系统 (1), 并假定 $[A, B, Q^{1/2}]$ 能控能观．在采样控制 (5) 下，如果 ΔT 满足

$$\Delta T \mathrm{e}^{\|A\|\Delta T} \leqslant \frac{1}{(1 + 3\|B_1^\tau H\|)\|A_1\|}, \tag{6}$$

则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t(x_s^\tau Qx_s+u_s^\tau Ru_s)\mathrm{d}s\leqslant \mathrm{tr}(C^\tau PC)+O(\Delta T^2). \tag{7}$$

这里

$$A_1\triangleq A-BR^{-1}B^\tau P,\quad B_1\triangleq BR^{-1}B^\tau P,\quad H=\int_0^\infty \mathrm{e}^{A_1^\tau t}\mathrm{e}^{A_1 t}\mathrm{d}t. \tag{8}$$

注 1　令 $c_1=\Delta T\|A_1\|\mathrm{e}^{\|A\|\Delta T}$, $\alpha_1=\dfrac{\|B_1^\tau H\|c_1}{1-c_1}$, 则当 ΔT 满足 (6) 式时，易验证

$$c_1\in(0,1),\quad \alpha_1\in\left(0,\ \frac{1}{3}\right].$$

注 2　记 $f(x)=x\mathrm{e}^{\|A\|x}$. 易见对 $x\in[0,\infty)$, 有 $f'(x)=(1+\|A\|x)\mathrm{e}^{\|A\|x}\geqslant 1>0$. 这说明 $f(x)=x\mathrm{e}^{\|A\|x}$ 在 $[0,\infty)$ 上是 x 的严格单调增函数. 因此，实际中 ΔT 的选择范围可简单地由下式确定： $0<\Delta T\leqslant\min\left\{\alpha,\ \dfrac{1}{(1+3\|B_1^\tau H\|)\|A_1\|\mathrm{e}^{\|A\|\alpha}}\right\}$, 这里 α 可为任意正实数. 特别地，可取 $\alpha=1$. 此时， $0<\Delta T\leqslant\min\left\{1,\ \dfrac{1}{(1+3\|B_1^\tau H\|)\|A_1\|\mathrm{e}^{\|A\|}}\right\}$. 当然，若能求出方程 $x\mathrm{e}^{\|A\|x}=\dfrac{1}{(1+3\|B_1^\tau H\|)\|A_1\|}$ 的解 x_0, 则 ΔT 的选择范围可为： $\Delta T\in(0,x_0)$. 但一般来说，求解该方程需要一定的计算量.

注 3　这里我们只给出了 ΔT 的一个选择范围. 当采样步长 ΔT 在该范围内时，可以证明基于二次指标所设计的采样控制不仅能保证闭环系统的稳定性，而且还能保证二次指标的次优性. 对一般非线性系统或其他控制指标而言，如何确定 ΔT 的最大选取范围、如何最优地选取 ΔT 以及如何给出采样步长与系统结构、参数之间的显示解析关系，是非常困难和复杂的问题，最好具体问题具体分析. 原因是这些问题不仅依赖于系统的具体结构、参数，而且还依赖于控制目的. 例如文献 [6], 其控制目的为闭环系统的稳定性和控制器的鲁棒性，通过对不确定性的合适度量描述，建立了采样步长与系统不确定性和可镇定性之间的关系. 而本文的控制目的则是闭环系统的稳定性和二次指标的次优性，因此，采样步长的选取不仅依赖于系统参数 A 和 B, 而且还依赖于指标的参数 R, Q 和它的二次型结构. 例如，参数 P, A_1, B_1 和 H 就来自该指标. 而且由于 $H=\int_0^\infty \mathrm{e}^{A_1^\tau t}\mathrm{e}^{A_1 t}\mathrm{d}t$, 所以一般来讲 $\|H\|$ 的大小依赖于 A_1 的实部， A_1 的实部越小， $\|H\|$ 越大. 由 (6) 式，这可能会缩小 ΔT 的选择范围.

在证明定理 2 之前，我们引入以下引理. 该引理在定理 $2\sim4$ 的证明中将起关键作用.

引理 1[8]　设 $\{x_t,\mathcal{F}_t\}$ 是一满足

$$\int_0^t x_s^2\mathrm{d}s<\infty\quad \text{a.s.}\quad \forall t\geqslant 0$$

的随机适应过程. 若 $\{w_t,\mathcal{F}_t\}$ 是 Wiener 过程，则当 $t\to\infty$ 时有

$$\int_0^t x_s\mathrm{d}w_s=O\left(\sqrt{\left(\int_0^t x_s^2\mathrm{d}s\right)\log\log\left(\mathrm{e}+\int_0^t x_s^2\mathrm{d}s\right)}\right)\quad \text{a.s.}$$

证明定理 2　为便于表述，我们引入如下记号 $t'\triangleq\left\lceil\dfrac{t}{\Delta T}\right\rceil\Delta T$. 这里 $\lceil x\rceil$ 表示不大于 x 的最大整数.

系统 (1) 在采样控制 (5) 下得到的闭环形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_t &= A_1x_t\mathrm{d}t + B_1(x_t - x_{t'})\mathrm{d}t + C\mathrm{d}W_t &(9)\\ &= A_1x_{t'}\mathrm{d}t + A(x_t - x_{t'})\mathrm{d}t + C\mathrm{d}W_t. &(10)\end{aligned}$$

由 Ito 公式，对 $\forall t\in[t', t'+\Delta T)$,

$$x_t - x_{t'} = A\int_{t'}^{t}(x_s - x_{s'})\mathrm{d}s + (t-t')A_1x_{t'} + C(W_t - W_{t'}). \tag{11}$$

由 (11) 式，对 $\forall t\in[t', t'+\Delta T)$,

$$\|x_t - x_{t'}\| \leqslant \|A\|\int_{t'}^{t}\|x_s - x_{s'}\|\mathrm{d}s + \Delta T\|A_1\|\|x_{t'}\| + \|C(W_t - W_{t'})\|. \tag{12}$$

应用 Grownwall 引理，得

$$\begin{aligned}\|x_t - x_{t'}\| &\leqslant \Delta T\|A_1\|\|x_{t'}\|\mathrm{e}^{\|A\|(t-t')} + \|C(W_t - W_{t'})\|\\ &\quad + \|A\|\int_{t'}^{t}\mathrm{e}^{\|A\|(t-s)}\|C(W_s - W_{t'})\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant c_1\|x_{t'}\| + c_2(t), &(13)\end{aligned}$$

这里

$$\begin{cases} c_1 = \Delta T\|A_1\|\mathrm{e}^{\|A\|\Delta T},\\ c_2(t) = \|C(W_t - W_{t'})\| + \|A\|\mathrm{e}^{\|A\|\Delta T}\displaystyle\int_{t'}^{t}\|C(W_s - W_{t'})\|\mathrm{d}s.\end{cases}$$

注意到，由 (9) 式及 Ito 公式，我们可以得到

$$\begin{aligned}&x_t^\tau Px_t - x_0^\tau Px_0\\ &= \int_0^t x_s^\tau(A_1^\tau P + PA_1)x_s\mathrm{d}s + \int_0^t((x_s - x_{s'})^\tau B_1^\tau Px_s + x_s^\tau PB_1(x_s - x_{s'}))\mathrm{d}s\\ &\quad + 2\int_0^t x_s^\tau PC\mathrm{d}W_s + t\cdot\mathrm{tr}(C^\tau PC).\end{aligned}$$

由此可得，

$$\begin{aligned}&x_t^\tau Px_t + \int_0^t(x_s^\tau Qx_s + u_s^\tau Ru_s)\mathrm{d}s\\ &= x_0^\tau Px_0 + \int_0^t x_s^\tau(A_1^\tau P + PA_1)x_s\mathrm{d}s + \int_0^t(x_s^\tau Qx_s + (u_s^* + u_s - u_s^*)^\tau R(u_s^* + u_s - u_s^*))\mathrm{d}s\\ &\quad + \int_0^t((x_s - x_{s'})^\tau B_1^\tau Px_s + x_s^\tau PB_1(x_s - x_{s'}))\mathrm{d}s + 2\int_0^t x_s^\tau PC\mathrm{d}W_s + t\cdot\mathrm{tr}(C^\tau PC)\\ &= x_0^\tau Px_0 + \int_0^t(x_s - x_{s'})^\tau PBR^{-1}B^\tau P(x_s - x_{s'})\mathrm{d}s + 2\int_0^t x_s^\tau PC\mathrm{d}W_s + t\cdot\mathrm{tr}(C^\tau PC)\\ &= x_0^\tau Px_0 + \int_0^t\|x_s - x_{s'}\|_G^2\mathrm{d}s + 2\int_0^t x_s^\tau PC\mathrm{d}W_s + t\cdot\mathrm{tr}(C^\tau PC), &(14)\end{aligned}$$

其中 $G \triangleq PBR^{-1}B^\tau P$, $\|x_s - x_{s'}\|_G^2 = (x_s - x_{s'})^\tau G(x_s - x_{s'})$.

下面证明当取合适小的 ΔT 时，有

$$\limsup_{t}\frac{1}{t}\int_0^t\|x_{s'}\|^2\mathrm{d}s < \infty. \tag{15}$$

易验证 H 满足

$$A_1^\tau H + HA_1 = -I.$$

由 (9) 式和 Ito 公式得

$$x_t^\tau H x_t = x_0^\tau H x_0 - \int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t (x_s - x_{s'})^\tau B_1^\tau H x_s \mathrm{d}s + t\cdot \mathrm{tr}(C^\tau H C) + 2\int_0^t x_s^\tau H C \mathrm{d}W_s. \tag{16}$$

进而由 (13) 式得

$$\begin{aligned}(x_s - x_{s'})^\tau B_1^\tau H x_s &\leqslant \|B_1^\tau H\| \cdot \|x_s - x_{s'}\| \cdot \|x_s\| \\ &\leqslant \|B_1^\tau H\| (c_1 \|x_{s'}\| + c_2(s)) \|x_s\| \\ &\leqslant \|B_1^\tau H\| \left[\frac{c_1}{1-c_1}\|x_s\| + \frac{c_2(s)}{1-c_1}\right] \|x_s\| \\ &\leqslant \alpha_1 \|x_s\|^2 + \beta_1(s)\|x_s\|,\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\alpha_1 = \dfrac{\|B_1^\tau H\| c_1}{1-c_1}$, $\beta_1(t) = \dfrac{\|B_1^\tau H\| c_2(t)}{1-c_1}$, 并且这里我们还用到了 $c_1 \in (0,1)$ (见注 1) 和由 (13) 式得到的不等式

$$\|x_{s'}\| \leqslant \frac{1}{1-c_1}\|x_s\| + \frac{c_2(s)}{1-c_1}. \tag{18}$$

将 (17) 式代入 (16) 式，并应用引理 1 得

$$\begin{aligned}x_t^\tau H x_t &\leqslant x_0^\tau H x_0 - (1-2\alpha_1)\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t \beta_1(s)\|x_s\|\mathrm{d}s \\ &\quad + t\cdot \mathrm{tr}(C^\tau H C) + 2\int_0^t x_s^\tau H C \mathrm{d}W_s \\ &\leqslant x_0^\tau H x_0 - (1-2\alpha_1)\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s + 2\left(\int_0^t \|\beta_1(s)\|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \\ &\quad + t\cdot \mathrm{tr}(C^\tau H C) + O\left(\left(\int_0^t \|x_s\|^2 ds\right)^{2/3}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

由 (6) 式和注 1 知

$$1 - 2\alpha_1 \geqslant \frac{1}{3}.$$

再由 $\|W_t - W_{t'}\|$ 的独立增量性，运用大数定理得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|\beta_1(s)\|^2 \mathrm{d}s = E\int_0^{\Delta T} \|\beta_1(s)\|^2 \mathrm{d}s = O(\Delta T^2), \tag{20}$$

从而

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}x_t^\tau H x_t + (1-2\alpha_1)\frac{1}{t}\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s\right) \\ &\leqslant \mathrm{tr}(C^\tau H C) + O\left(\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2}\right) + O\left(\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\int_0^t \|x_s\|^2 \mathrm{d}s\right)^{2/3}\right),\end{aligned}$$

因此,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|x_s\|^2\mathrm{d}s<\infty. \tag{21}$$

进一步，由 (18) 和 (21) 式知 (15) 式成立．再利用 (13) 式,

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|x_s-x_{s'}\|_G^2\mathrm{d}s &\leqslant 2c_1^2\cdot\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|x_{s'}\|_G^2\mathrm{d}s+2\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t c_2(s)^2\mathrm{d}s\\ &= O(\Delta T^2).\end{aligned} \tag{22}$$

于是由 (14) 可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}x_t^\tau Px_t+\frac{1}{t}\int_0^t(x_s^\tau Qx_s+u_s^\tau Ru_s)\mathrm{d}s\right]\\ &=\mathrm{tr}(C^\tau PC)+\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\|x_s-x_{s'}\|_G^2\mathrm{d}s\\ &=\mathrm{tr}(C^\tau PC)+O(\Delta T^2),\end{aligned}$$

故 (7) 式成立.

2 时变参数系统的二次指标最优采样控制

本节考虑时变参数 LCT 系统的二次指标最优采样控制．假定被控系统的模型为

$$\mathrm{d}x_t=A(r_t)x_t\mathrm{d}t+B(r_t)u_t\mathrm{d}t+C(r_t)\mathrm{d}W_t, \tag{23}$$

其中 $x_t\in\mathbb{R}^n$, $u_t\in\mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入， $W_t\in\mathbb{R}^n$ 是标准 Brown 运动． r_t 是在有限状态集 $\mathcal{S}=\{1,\cdots,N\}$ 上取值的 Markov 过程，其转移概率阵 (参见文献 [10]) 由

$$P(\tau)=[P_{ij}(\tau)]=[P(r_{t+\tau}=j\mid r_t=i)]=\mathrm{e}^{\Lambda\tau},\quad t_0\leqslant t\leqslant t+\tau \tag{24}$$

给出．这里 $\Lambda=(\lambda_{ij})$, $\lambda_{ij}\geqslant 0$, $j\neq i$, 并且

$$-\lambda_{ii}=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{ij}. \tag{25}$$

由于 r_t 是在有限集上取值的 Markov 过程，可以证明 $|\lambda_{ij}|<\infty$ (见文献 [9], P150, 151). 假定系统参数 $A(r_t)$ 和 $B(r_t)$ 已知，状态初值 x_0 与 Markov 过程 $\{r_t\}$ 独立．由于在任何有限时间区间上， Markov 过程 $\{r_t\}$ 的几乎所有样本轨迹都是阶梯函数，且间断点最多为有限个；因此，在任何有限时间区间内， (23) 式的解可以看成是有限个定常参数系统解的有限连接 (见文献 [10]). 下文中，当 $r_t=i$ 时，我们记 $A(r_t)=A_i$, $B(r_t)=B_i$, 及其他类似的表示.

我们的目的是研究采样步长对控制效果的影响，找出采样控制能镇定系统的条件，研究基于状态采样的采样二次指标控制的最优性.

首先，我们给出随机能稳的定义 (文献 [11, 12]). 该定义是针对“无噪声”系统

$$\mathrm{d}x_t=A(r_t)x_t\mathrm{d}t+B(r_t)u_t\mathrm{d}t \tag{26}$$

和 (24) 式的.

定义 1 如果对所有有限 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $r_0\in\mathcal{S}$, 存在一个线性反馈控制律

$$u_t=-L(r_t)x(t),$$

其中 $\|L(r_t)\|<\infty$, 使得存在一个对称正定阵 $\widetilde{M}$ 满足

$$\lim_{T\to\infty} E\left\{\int_0^T x^\tau(t,x_0,r_0,u)x(t,x_0,r_0,u)\mathrm{d}t \mid x_0,r_0\right\}\leqslant x_0^\tau\widetilde{M}x_0,$$

则称系统 (26) 和 (24) 随机能稳，或简称为 $[A(r_t),B(r_t)]$ 随机能稳.

我们研究的二次型指标是随机系统中常用的，形式如下：

$$J^0(u)=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{\int_0^T(x^\tau(t)Q(r_t)x(t)+u^\tau(t)R(r_t)u(t))\mathrm{d}t\mid x_0,r_0\right\},\tag{27}$$

其中 $R_i>0$, $Q_i\geqslant 0$, 且 $[A_i,Q_i^{1/2}]$ 能观.

由文献 [11] 可知，对任意给定的正定阵 R_i 和半正定阵 Q_i, $[A_i,Q_i^{1/2}]$ 能观，耦合的代数 Riccati 方程

$$A_i^\tau M_i+M_iA_i-M_iB_iR_i^{-1}B_i^\tau M_i+\sum_{j=1}^N\lambda_{ij}M_j+Q_i=0\tag{28}$$

有惟一正定解组 $\{M_i,\ i=1,2,\ldots,N\}$ 的充分必要条件是 $[A(r_t),B(r_t)]$ 随机能稳

类似于上一节，我们仍引入一个允许控制类

$$\mathcal{U}^0=\Big\{u:\ u_t\in\sigma\{x_s:s\leqslant t\}\ \text{且使 (23) 式的状态}\{x_t\}\text{满足}\\ \limsup_{t\to\infty}E\|x_t\|^2<\infty\ \text{和}\ \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s<\infty\Big\}.\tag{29}$$

我们有如下结论：

定理 3 考虑系统 (23) 和 (24), 并假设 $[A(r_t),B(r_t)]$ 随机能稳； $[A_i,Q_i^{1/2}]$ 能观， $\forall i\in\mathcal{S}$; Markov 过程 $\{r_t,t\geqslant 0\}$ 和 Brown 运动 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 独立，则

a) 对任一 $u\in\mathcal{U}^0$, 均有 $J^0(u)\geqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}E\displaystyle\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s$.

b) 基于状态全过程的二次指标控制律

$$u_t^*\triangleq -L(r_t)x_t=-R(r_t)^{-1}B(r_t)^\tau M(r_t)x_t\tag{30}$$

属于 $\mathcal{U}^0$, 且

$$J^0(u^*)=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s=\min_{u\in\mathcal{U}^0}J^0(u),$$

其中 M_i,R_i,Q_i 分别由 (28) 和 (27) 式给出.

证 a) 由 (23) 式，类似于文献 [10] 中 (2.29) 式，得

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}(x_t^\tau M(r_t)x_t)&\triangleq\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left(E[x_{t+\Delta}^\tau M(r_{t+\Delta})x_{t+\Delta}\mid r_t]-x_t^\tau M(r_t)x_t\right)\\ &=x_t^\tau(A_1^\tau(r_t)M(r_t)+M(r_t)A_1(r_t)+\sum_j\lambda_{r_t,j}M_j)x_t+\mathrm{tr}(C^\tau(r_t)M(r_t)C(r_t)),\end{aligned}\tag{31}$$

这里 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是 $\{r_t,x_t\}$ 的无穷小算子，则由 Dynkin 公式得

$$\begin{aligned}Ex_t^\tau M(r_t)x_t\ =\ &Ex_0^\tau M(r_0)x_0+E\int_0^t x_s^\tau(A^\tau(r_s)M(r_s)+M(r_s)A(r_s)+\sum_j\lambda_{r_s,j}M_j)x_s\mathrm{d}s\\ &+E\int_0^t(u_s^\tau B^\tau(r_s)M(r_s)x_s+x_s^\tau M(r_s)B(r_s)u_s)\mathrm{d}s\\ &+E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
& E\left\{x_t^\tau M(r_t)x_t+\int_0^t (x^\tau(s)Q(r_s)x(s)+u^\tau(s)R(r_s)u(s))\mathrm{d}s\right\} \\
= & \ Ex_0^\tau M(r_0)x_0+E\int_0^t \operatorname{tr}(C(r_s)^\tau M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s \\
& +E\int_0^t (u_s+R(r_s)^{-1}B(r_s)^\tau M(r_s)x_s)^\tau R(r_s)(u_s+R(r_s)^{-1}B(r_s)^\tau M(r_s)x_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

所以对任一 $u\in\mathcal{U}^0$, 均有

$$\begin{aligned}
J^0(u) \ = & \ \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t (x_s^\tau Q(r_s)x_s+u_s^\tau R(r_s)u_s)\mathrm{d}s \\
= & \ \limsup_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}E\int_0^t (u_s+R(r_s)^{-1}B(r_s)^\tau M(r_s)x_s)^\tau R(r_s)(u_s+R(r_s)^{-1}B(r_s)^\tau M(r_s)x_s)\mathrm{d}s\right. \\
& \left.+\frac{1}{t}E\int_0^t \operatorname{tr}(C(r_s)^\tau M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s\right\} \qquad (32)\\
\geqslant & \ \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t \operatorname{tr}(C(r_s)^\tau M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\|x_t\|^2=0$ 和 $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s<\infty$.

b) 系统 (23) 在控制 (30) 下得到如下形式:

$$\mathrm{d}x_t=A_1(r_t)x_t\mathrm{d}t+C(r_t)\mathrm{d}W_t, \tag{33}$$

其中

$$A_1(r_t)\triangleq A(r_t)-B(r_t)L(r_t). \tag{34}$$

因为 $[A(r_t),B(r_t)]$ 随机能稳，由文献 [11] 知，对每一个 $i\in\mathcal{S}$,

$$A_{1,i}^\tau K_i+K_iA_{1,i}+\sum_j\lambda_{i,j}K_j=-I \tag{35}$$

的一组对称解 K_i 是正定的. 构造 $K(r_t)$: 使得当 $r_t=i$ 时，有 $K(r_t)=K_i$. 于是类似于文献 [10] 的 (2.29) 式，得

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathcal{A}}(x_t^\tau K(r_t)x_t)\triangleq\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\left(E[x_{t+\Delta}^\tau K(r_{t+\Delta})x_{t+\Delta}\mid r_t]-x_t^\tau K(r_t)x_t\right) \\
= & \ x_t^\tau(A_1^\tau(r_t)K(r_t)+K(r_t)A_1(r_t)+\sum_j\lambda_{r_t,j}K_j)x_t+\operatorname{tr}(C^\tau(r_t)K(r_t)C(r_t)) \\
= & \ -\|x_t\|^2+\operatorname{tr}(C^\tau(r_t)K(r_t)C(r_t)), \qquad (36)
\end{aligned}$$

这里 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是 $\{r_t,x_t\}$ 的无穷小算子，则由 Dynkin 公式得

$$E\left\{x_t^\tau K(r_t)x_t+\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\right\}=Ex_0^\tau K(r_0)x_0+E\int_0^t\operatorname{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s. \tag{37}$$

于是

$$E\|x_t\|^2=O(t)\quad 和 \quad E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s=O(t). \tag{38}$$

下面我们进一步证明

$$\limsup_{t\to\infty}E\|x_t\|^2<\infty. \tag{39}$$

由于对 $\forall i\in\mathcal{S}$, $K(i)>0$, 且 $\mathcal{S}$ 只有有限个元素，所以存在常数 $\alpha>\beta>0$ 使得

$$0<\beta I\leqslant K(r_t)\leqslant\alpha I,\quad\forall t\geqslant 0. \tag{40}$$

由此及 (36) 式得

$$\widetilde{\mathcal{A}}(x_t^\tau K(r_t)x_t)\leqslant-\frac{1}{\alpha}x_t^\tau K(r_t)x_t+\mathrm{tr}(C^\tau(r_t)K(r_t)C(r_t)),$$

即

$$Ex_t^\tau K(r_t)x_t\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}t}Ex_0^\tau K(r_0)x_0+2E\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}(t-s)}\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s=O(1). \tag{41}$$

由此及 (40) 式知 (39) 式成立.

将 (39) 式代入 (37) 式得 $J^0(u^*)=\limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}E\displaystyle\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s$.

下面我们主要研究采样二次指标控制律

$$u_t=-L(i)x_t=-R_i^{-1}B_i^\tau M_i x_{k\Delta T},\quad t\in[k\Delta T,(k+1)\Delta T),\quad r_{k\Delta T}=i \tag{42}$$

的控制效果. 为此，记

$$h_1=\max_{i\in\mathcal{S}}\|\bar{A}_1(i)\|,\quad h=\max_{i\in\mathcal{S}}\|A_i\|,\quad d_1=\Delta T\mathrm{e}^{h\Delta T}h_1, \tag{43}$$

$$\bar{A}_1(r_t)=A(r_t)-B(r_t)L(r_{t'}),\quad t'=\left\lceil\frac{t}{\Delta T}\right\rceil\Delta T, \tag{44}$$

$$L=\max_{i\in\mathcal{S}}\|M_iB_iR_i^{-1}\|\cdot\max_{j\in\mathcal{S}}\|B_j^\tau K_j\|,\quad \lambda=(N-1)(\mathrm{e}^{\|\Lambda\|}-1), \tag{45}$$

其中 K_j 是 (35) 式的解.

定理 4 考虑系统 (23) 和 (24), 并假设 $[A(r_t),B(r_t)]$ 随机能稳; $[A_i,Q_i^{1/2}]$ 能观, $\forall i\in\mathcal{S}$; Markov 过程 $\{r_t,t\geqslant 0\}$ 和 Brown 运动 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 独立. 在采样控制 (42) 下，若采样步长 ΔT 满足

$$\begin{cases} d_1\triangleq\Delta T\mathrm{e}^{h\Delta T}h_1<1,\quad \Delta T\leqslant 1,\\ \dfrac{Ld_1}{1-d_1}+\dfrac{8(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\leqslant\dfrac{1}{3},\end{cases} \tag{46}$$

则有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t(\|x_s\|^2+\|u_s\|^2)\mathrm{d}s<\infty \tag{47}$$

和

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t(x_s^\tau Q(r_s)x_s+u_s^\tau R(r_s)u_s)\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s+O(\Delta T).\end{aligned} \tag{48}$$

注 4 如注 2 和 3 所述，如果我们的目的仅仅是镇定系统和得到次优 (或满意) 二次指标控制的话，那么可以很容易地给出采样步长 ΔT 的一个取值范围. 但要确定 ΔT 的最大选取范围及最优地选取 ΔT, 可能是非常困难和复杂的.

在给出定理 4 的证明之前，先介绍一个引理.

引理 2 设 r_t 是在有限状态集 $\mathcal{S}=\{1,\cdots,N\}$ 上取值的 Markov 过程，且满足 (24) 和 (25) 式. 函数 $f(r_s):\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, $g(r_s):\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^{n\times n}$, 且 $f(r_s)$ 和 $g(r_s)$ 都是 $\sigma\{r_t,t\geqslant s\}$ 上的可测

函数，则当 $s-s_0\leqslant\Delta T$ 且 $\Delta T\leqslant 1$ 时，有

$$E\left[\|g(r_s)-g(r_{s_0})\|\int_{s_0}^{s}f(r_\mu)\mathrm{d}\mu\mid r_{s_0}=i\right]\leqslant\max_{j\neq i}\|g(j)-g(i)\|\max_{l\in\mathcal{S}}f(l)\cdot\lambda(s-s_0)^2,$$

其中 $\lambda=(N-1)(\mathrm{e}^{\|\Lambda\|}-1)$.

证　当 $s-s_0\leqslant\Delta T$ 且 $\Delta T\leqslant 1$ 成立时，我们容易验证

$$\sum_{j\neq i}P_{ij}(s-s_0)\leqslant(s-s_0)\sum_{j\neq i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\Lambda(s-s_0)}-I}{s-s_0}\right)_{ij}\leqslant(s-s_0)\sum_{j\neq i}\left\|\frac{\mathrm{e}^{\Lambda(s-s_0)}-I}{s-s_0}\right\|\leqslant\lambda(s-s_0).\quad(49)$$

由于在任何有限时间区间上，Markov 过程 $\{r_t\}$ 的几乎所有样本轨迹都是阶梯函数，且间断点最多为有限个．假定这些间断点依次是 $s_1,s_2,\cdots,s_m$，且

$$s_0<s_1<s_2<\cdots<s_m<s_{m+1}=s,$$

则由 (49) 式得

$$\begin{aligned}&E\left[\|g(r_s)-g(r_{s_0})\|\int_{s_0}^{s}f(r_\mu)\mathrm{d}\mu\mid r_{s_0}=i\right]\\
=&\sum_{r_s=j,j\neq i}\|g(j)-g(i)\|\sum_{r_{s_1}\in\mathcal{S},\cdots,r_{s_m}\in\mathcal{S}}\sum_{i=0}^{m}f(r_{s_i})(s_{i+1}-s_i)\prod_{i=0}^{m}P_{r_{s_i},r_{s_{i+1}}}(s_{i+1}-s_i)\\
\leqslant&\sum_{r_s=j,j\neq i}\|g(j)-g(i)\|\left(\max_{l\in\mathcal{S}}\sum_{i=0}^{m}f(l)(s_{i+1}-s_i)\right)\left(\sum_{r_{s_1}\in\mathcal{S},\cdots,r_{s_m}\in\mathcal{S}}\prod_{i=0}^{m}P_{r_{s_i},r_{s_{i+1}}}(s_{i+1}-s_i)\right)\\
\leqslant&\sum_{r_s=j,j\neq i}\|g(j)-g(i)\|\max_{l\in\mathcal{S}}f(l)(s-s_0)\cdot P_{ij}(s-s_0)\\
\leqslant&\lambda(s-s_0)^2\cdot\max_{j\neq i}\|g(j)-g(i)\|\max_{l\in\mathcal{S}}f(l).\end{aligned}$$

定理 4 的证明　记

$$A_1(r_t)\triangleq A(r_t)-B(r_t)L(r_t),\quad B_1(r_t)\triangleq B(r_t)L(r_t),\quad\bar{B}_1(r_t)\triangleq B(r_t)L(r_{t'}),$$
$$u_t^*=-L(r_t)x_t=-R(r_t)^{-1}B(r_t)^\tau M(r_t)x_t,$$

则系统 (23) 在采样控制 (42) 下得到如下形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_t&=A_1(r_t)x_t\mathrm{d}t+B(r_t)(u_t-u_t^*)\mathrm{d}t+C(r_t)\mathrm{d}W_t\\
&=\bar{A}_1(r_t)x_{t'}\mathrm{d}t+A(r_t)(x_t-x_{t'})\mathrm{d}t+C(r_t)\mathrm{d}W_t,\end{aligned}\quad(50)$$

由此可得,

$$x_t-x_{t'}=\int_{t'}^{t}A(r_s)(x_s-x_{t'})\mathrm{d}s+\int_{t'}^{t}\bar{A}_1(r_s)\mathrm{d}s\cdot x_{t'}+\int_{t'}^{t}C(r_s)\mathrm{d}W_s.\quad(51)$$

进而，有

$$\|x_t-x_{t'}\|\leqslant\int_{t'}^{t}\|A(r_s)\|\cdot\|x_s-x_{t'}\|\mathrm{d}s+\int_{t'}^{t}\|\bar{A}_1(r_s)\|\mathrm{d}s\cdot\|x_{t'}\|+\|\int_{t'}^{t}C(r_s)\mathrm{d}W_s\|.\quad(52)$$

应用 Grownwall 引理，得

$$\begin{aligned}\|x_t-x_{t'}\|\leqslant&\int_{t'}^{t}\|\bar{A}_1(r_s)\|\mathrm{d}s\cdot\|x_{t'}\|\cdot\mathrm{e}^{\int_{t'}^{t}\|A(r_t)\|\mathrm{d}s}+\|\int_{t'}^{t}C(r_s)\mathrm{d}W_s\|\\
&+\int_{t'}^{t}h\cdot\mathrm{e}^{h(t-s)}\cdot\|\int_{t'}^{s}C(r_\mu)\mathrm{d}W_\mu\|\mathrm{d}s\\
\leqslant&d_1\|x_{t'}\|+d_2(t),\end{aligned}\quad(53)$$

其中 d_1 由 (43) 式给出,

$$d_2(t)=h\mathrm{e}^{h\Delta T}\int_{t'}^{t}\|\int_{t'}^{s}C(r_\mu)\mathrm{d}W_\mu\|\mathrm{d}s+\|\int_{t'}^{t}C(r_s)\mathrm{d}W_s\|. \tag{54}$$

类似于文献 [10, 11], 由 (50) 式, Ito 公式及 (35) 式, 得

$$\begin{aligned}Ex_t^\tau K(r_t)x_t&=Ex_0^\tau K(r_0)x_0+E\int_0^t x_s^\tau(A_1^\tau(r_s)K(r_s)+K(r_s)A_1(r_s)+\sum_j\lambda_{r_s,j}K_j)x_s\mathrm{d}s\\&\quad+2E\int_0^t(u_s-u_s^*)^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s+E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s\\&=Ex_0^\tau K(r_0)x_0-E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s+E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s\\&\quad+2E\int_0^t(u_s-u_s^*)^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{55}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(u_s-u_s^*)^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s=(L(r_s)x_s-L(r_{s'})x_{s'})^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s\\&=(x_s-x_{s'})^\tau L^\tau(r_{s'})B^\tau(r_s)K(r_s)x_s+x_s^\tau(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s,\end{aligned} \tag{56}$$

其中的第 1 项可估为

$$\begin{aligned}&(x_s-x_{s'})^\tau L^\tau(r_{s'})B^\tau(r_s)K(r_s)x_s\\&\leqslant L\cdot\|x_s-x_{s'}\|\cdot\|x_s\|\leqslant L\cdot[d_1\|x_{s'}\|+d_2(s)]\cdot\|x_s\|\\&\leqslant L\cdot\left[\frac{d_1}{1-d_1}\|x_s\|+\frac{d_2(s)}{1-d_1}\right]\cdot\|x_s\|\leqslant\alpha_2\|x_s\|^2+\beta_2(s)\|x_s\|,\end{aligned} \tag{57}$$

其中

$$\alpha_2=\frac{Ld_1}{1-d_1},\quad \beta_2(t)=\frac{Ld_2(t)}{1-d_1}, \tag{58}$$

这里用到了条件 $d_1<1$ 和 (53) 式及由 (53) 式得到的不等式

$$\|x_{s'}\|\leqslant\frac{1}{1-d_1}\|x_s\|+\frac{d_2(s)}{1-d_1}. \tag{59}$$

令 $c=\max\limits_{i\in\mathcal{S}}\mathrm{tr}(C_i^\tau C_i)$, 则由 (54) 式得

$$\begin{aligned}Ed_2(t)^2&\leqslant 2E\|\int_{t'}^t C(r_s)\mathrm{d}W_s\|^2+2h^2\mathrm{e}^{2h\Delta T}(t-t')\int_{t'}^t E\|\int_{t'}^s C(r_\mu)\mathrm{d}W_\mu\|^2\mathrm{d}s\\&=2E\int_{t'}^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s+2h^2\mathrm{e}^{2h\Delta T}(t-t')\int_{t'}^t E\int_{t'}^s\mathrm{tr}(C^\tau(r_\mu)C(r_\mu))\mathrm{d}\mu\mathrm{d}s\\&\leqslant 2c(t-t')+ch^2\mathrm{e}^{2h\Delta T}(t-t')^3.\end{aligned}$$

进一步, 由 $\Delta T\leqslant 1$ 得

$$E\int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T}d_2^2(s)\mathrm{d}s\leqslant c\Delta T^2+\frac{1}{4}ch^2\mathrm{e}^{2h\Delta T}\Delta T^4\leqslant c\Delta T^2(1+h^2\mathrm{e}^{2h}). \tag{60}$$

由此及引理 2, (56) 式中的第 2 项在 $(0, K\Delta T], K\in\mathbb{N}$ 上积分，再取期望得

$$\begin{aligned}
&E\int_0^{K\Delta T} x_s^\tau(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s\mathrm{d}s\\
&= E\int_0^{K\Delta T}\|(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)\|\cdot\left(2(1+d_1)^2\|x_{s'}\|^2+2d_2(s)^2\right)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{i=1}^{N}E\Big[\int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T}\|(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)\|\cdot 2(1+d_1)^2\|x_{k\Delta T}\|^2\mathrm{d}s\mid r_{k\Delta T}=i\Big]\\
&\quad\cdot P(r_{k\Delta T}=i)+\sum_{k=0}^{K-1}E\int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T}\|(L(r_s)-L(r_{k\Delta T}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)\|\cdot 2d_2(s)^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{8(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\sum_{k=0}^{K-1}E\int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T}(\|x_s\|^2+d_2(s)^2)\mathrm{d}s+4L\sum_{k=0}^{K-1}E\int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T}d_2^2(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{8(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T E\int_0^{K\Delta T}\|x_s\|^2\mathrm{d}s+4cL\Delta T(1+h^2\mathrm{e}^{2h})\left(1+\frac{2(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}\lambda\right)K\Delta T,
\end{aligned}\tag{61}$$

这里还用到了 $\Delta T\leqslant 1$ 和由 (53) 式得到的不等式

$$\|x_s\|^2\leqslant 2(1+d_1)^2\|x_{s'}\|^2+2d_2(s)^2,\quad \|x_{s'}\|^2\leqslant\frac{2}{(1-d_1)^2}\|x_s\|^2+\frac{2d_2(s)^2}{(1-d_1)^2}.\tag{62}$$

容易看出，对任意的 t, (61) 式也成立，即

$$\begin{aligned}
&E\int_0^t x_s^\tau(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau B^\tau(r_s)K(r_s)x_s\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{8(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s+4Lc\Delta T(1+h^2\mathrm{e}^{2h})\left(1+\frac{2(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}\lambda\right)t.
\end{aligned}\tag{63}$$

进而，由 (55) $\sim$ (57) 和 (63) 式及 Schwartz 不等式，得

$$\begin{aligned}
&Ex_t^\tau K(r_t)x_t\\
&\leqslant Ex_0^\tau K(r_0)x_0-\left(1-2\alpha_2-\frac{16(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\right)E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\\
&\quad+E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s+2E\int_0^t\beta_2(s)\|x_s\|\mathrm{d}s\\
&\quad+8cL\Delta T\left(1+h^2\mathrm{e}^{2h}\right)\left(1+\frac{2(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}\lambda\right)t\\
&\leqslant Ex_0^\tau K(r_0)x_0-\left(1-2\alpha_2-\frac{16(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\right)E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\\
&\quad+E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s+2E\left(\int_0^t\beta_2(s)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\\
&\quad+8cL\Delta T\left(1+h^2\mathrm{e}^{2h}\right)\left(1+\frac{2(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}\lambda\right)t.
\end{aligned}$$

由 (46) 式易验证

$$1-2\alpha_2-\frac{16(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\geqslant\frac{1}{3}.$$

由 $\|W_t - W_{t'}\|$ 的独立增量性，运用大数定理，类似于 (60) 式，得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \beta_2(s)^2\mathrm{d}s = O(\Delta T^2),$$

从而

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} E\left(\frac{1}{t}x_t^\tau K(r_t)x_t + \left(1-2\alpha_2-\frac{16(1+d_1)^2}{(1-d_1)^2}L\lambda\Delta T\right)\frac{1}{t}\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t \mathrm{tr}(C^\tau(r_s)K(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s + O(\Delta T)\\
&\quad +O\left(\Delta T\cdot\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\right),
\end{aligned}\tag{64}$$

因此,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\|x_s\|^2\mathrm{d}s<\infty,\tag{65}$$

也就是说 (47) 式成立.

下面计算指标. 由 (59) 和 (65) 式，得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E\|x_{s'}\|^2\mathrm{d}s<\infty.\tag{66}$$

再利用 (53) 式，类似于 (61) 式得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t (u_s-u_s^*)^\tau R(r_s)(u_s-u_s^*)\mathrm{d}s\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t [x_s^\tau(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau R(r_s)(L(r_s)-L(r_{s'}))x_s\\
&\quad +2x_s^\tau(L(r_s)-L(r_{s'}))^\tau R(r_s)L(r_{s'})(x_s-x_{s'})\\
&\quad +(x_s-x_{s'})^\tau L^\tau(r_{s'})R(r_s)L(r_{s'})(x_s-x_{s'})]\,\mathrm{d}s\\
&=O(\Delta T).
\end{aligned}\tag{67}$$

所以类似于 (14) 式，由耦合的 Riccati 方程 (28) 得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}E\left(\frac{1}{t}x_t^\tau M(r_t)x_t+\frac{1}{t}\int_0^t(x_s^\tau Q(r_s)x_s+u_s^\tau R(r_s)u_s)\mathrm{d}s\right)\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s\\
&\quad +\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t(u_s-u_s^*)^\tau R(r_s)(u_s-u_s^*)\mathrm{d}s\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\mathrm{tr}(C^\tau(r_s)M(r_s)C(r_s))\mathrm{d}s+O(\Delta T).
\end{aligned}\tag{68}$$

3 结束语

本文研究了一般形式的 LCT 系统，既包括定常参数类又包括时变参数类. 控制器的设计直接基于原连续系统和原连续型性能指标，没涉及任何离散化模型或离散化指标. 不仅研究了

闭环系统的稳定性，而且还分析了闭环系统性能指标的最优性；特别地，比较了基于状态采样值的采样二次指标控制和基于状态全过程的常规二次指标控制下的最优指标值，给出了两者误差的显式关系式，指出当采样时间 ΔT 间隔不大时，两种控制的效果差别也不大，误差的上界分别为 $O(\Delta T^2)$ 和 $O(\Delta T)$. 如何确定 ΔT 的最大选取范围、如何最优地选取 ΔT 以及如何给出采样步长与系统结构、参数之间的显示解析关系，是非常困难和复杂的问题，应具体问题具体分析.

参　考　文　献

1 Åström K J, Wittenmark B. Computer Control Systems——Theory and Design. NJ: Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc, 1984
2 Hagiwara T, Araki M. Design of a stable state feedback controller based on the multirate sampling of the plant output. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(9): 812 ~ 819
3 Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(9): 820 ~ 832
4 Chen T W, Francis B. Optimal Sampled-Data Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995
5 Brockwell A, Borovkov K, Evans R. Stability of an adaptive regulator for partially known nonlinear stochastic systems. SIAM J Control and Optimization, 1999, 37(5): 1553 ~ 1567
6 Xue F, Guo L. On limitations of the sampled-data feedback for nonparametric dynamical systems. Journal of Systems Science and Complexity, 2002, 15(3): 225 ~ 250
7 Duncan T E, Guo L, Pasik-Duncan B. Adaptive continuous-time linear quadratic Gaussian control. IEEE Trans Automatic Control, 1999, 44(9): 1653 ~ 1662
8 Chen H F, Guo L. Identification and stochastic adaptive control. Boston: Birkhauser, 1991
9 Freedman D. Markov Chain. New York: Springer-Verlag, 1983
10 Wonham W M. Random differential equations in control theory. In: Bharucha-reid A T, ed. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol 2. New York: Academic, 1971
11 Ji Y D, Chizeck H J. Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. IEEE Trans Automatic Control, 1990, 35(7): 777 ~ 788
12 Ji Y D, Chizeck H J. Jump linear quadratic Gaussian control in continuous time. IEEE Trans Automatic Control, 1992, 37(12): 1884 ~ 1892